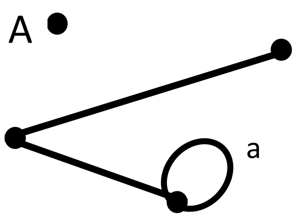
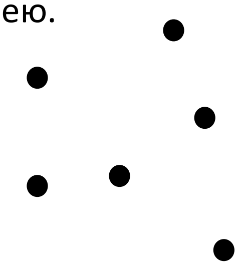
Основні поняття теорії графів

Графом **називається сукупність точок (вершин) і ліній (ребер), що їх з'єднують.**

Якщо ребро з'єднує дві вершини, то кажуть, що воно ***інцидентне*** цим вершинам, а вершини, які з'єднані таким ребром, називаються ***суміжними***. Якщо кінці ребра належать одній вершині, то таке ребро називається ***петлею***. На малюнку 1 ребро а є петлею.



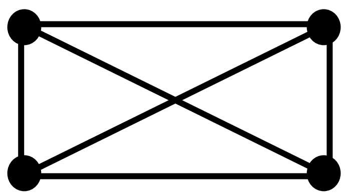
Мал.1



Мал.2

Вершини, які не належать кінцям жодного з ребер у графі, називаються ***ізольованими***. Прикладом ізольованої вершини на малюнку 1 є вершина А. Граф, який складається лише з ізольованих вершин, називається ***нуль-графом*** (мал.2)

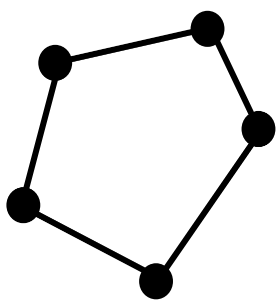
Граф, у якому будь-яка пара вершин з'єднана ребрами, називається ***повним*** (мал.3)



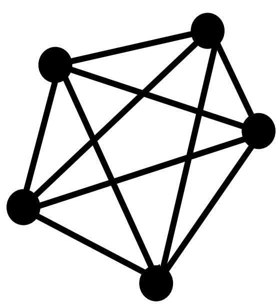
Мал.3

Степенем вершини називають число ребер, яким належить ця вершина.

Граф називають ***зв'язним***, якщо будь-яка пара його вершин зв'язна. Повний граф завжди є зв'язним, але не всякий зв'язний граф є повним. Прикладом може бути будь-який багатокутник: він зв'язний, але не повний (мал. 4). Але якщо у цьому багатокутнику провести всі діагоналі, то отримаємо повний зв'язний граф (мал. 5).

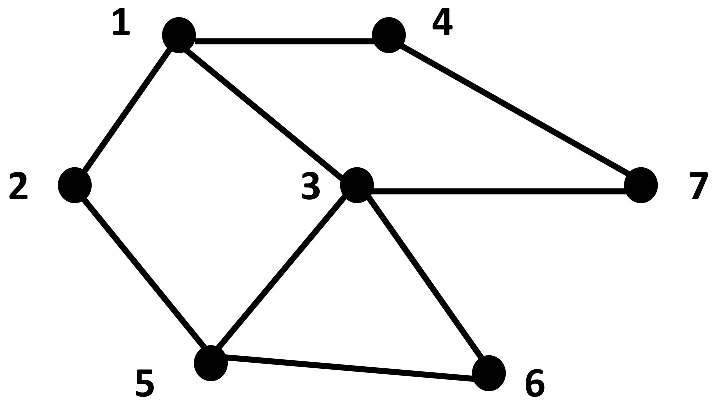


Мал.4



Мал.5

***Циклом* називається шлях, в якому збігаються початкова і кінцева вершини**. На малюнку зображено граф, який для кожної вершини має по кілька циклів. Наприклад, для вершини 1 існує 6 циклів: (1-2, 2-5, 5-3, 3-1), (1-3,3-7, 7-4, 4-1), (1-3, 3-5, 5-6, 6-3, 3-1), (1-2,2-5, 5-6, 6-3, 3-1), (1-2, 2-5, 5-6, 6-3, 3-7, 7-4, 4-1), (1-3, 3-5, 5-6, 6-3, 3-7, 7-4, 4-1).



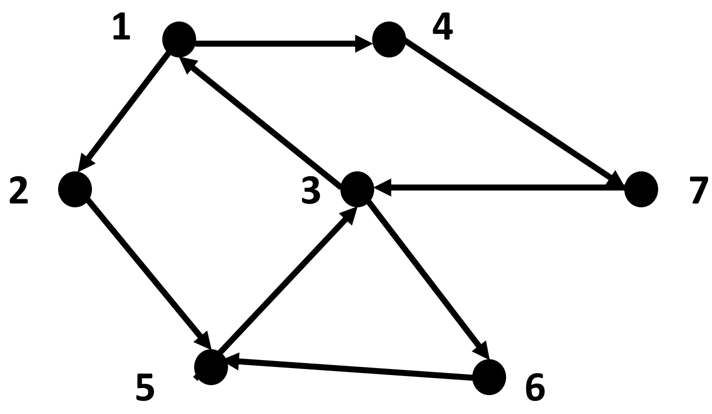
Мал.6

Якщо цикл через кожну вершину проходить лише один раз, то такий цикл називається ***простим***. Як видно з малюнка 6, для вершини 1 існує чотири простих цикли: (1-2, 2-5, 5-3, 3-1), (1-3, 3-7, 7-4, 4-1), (1-2, 2-5, 5-6, 6-3, 3-1), (1-2, 2-5, 5-6, 6-3, 3-7, 7-4, 4-1).

***Довжиною шляху* (циклу) називається кількість ребер цього шляху (циклу)**. На малюнку 6 для кожного вказаного циклу вершини 1 неважко порахувати довжину: 4, 4, 5, 5, 7, 7.

Граф, який не має жодного циклу, називається *деревом*.

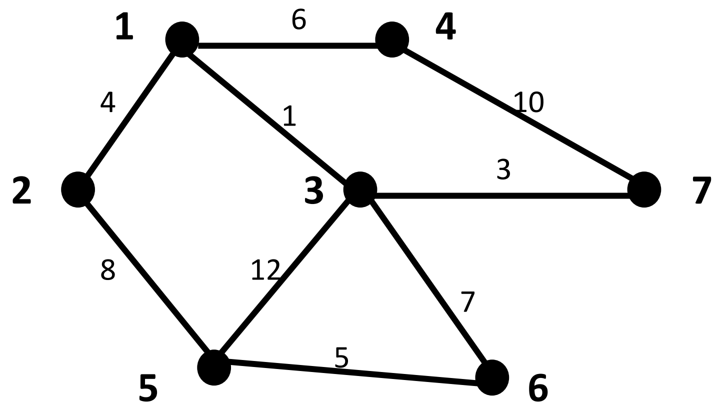
Граф, у якому для всіх ребер вказано напрям, називається *орієнтованим*, або *орграфом* (мал. 7).



Мал.7

Для орієнтованих графів специфічним є визначення степенів вершин. Для кожної з них окремо визначається ***вхідний степінь***, що дорівнює кількості ребер, які входять у вершину, і ***вихідний степінь***, що визначається кількістю ребер, які виходять з неї. Сума вхідного і вихідного степенів вершини орієнтованого графа називається степенем цієї вершини.

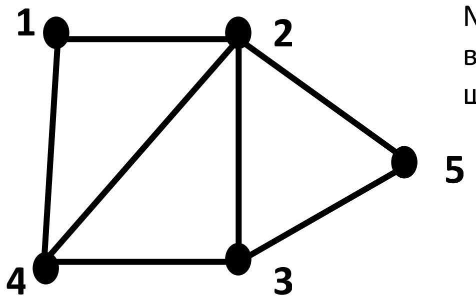
Якщо у графі вказана ще й «вага» кожного ребра, то такий граф називається *зваженим*. Існують неорієнтовані зважені графи та орієнтовані зважені графи (мал. 8).



Мал.8

Способи представлення графів

Існує два найпоширеніші способи представлення графів. Для прикладу розглянемо граф, зображений на малюнку 9.



Мал.9

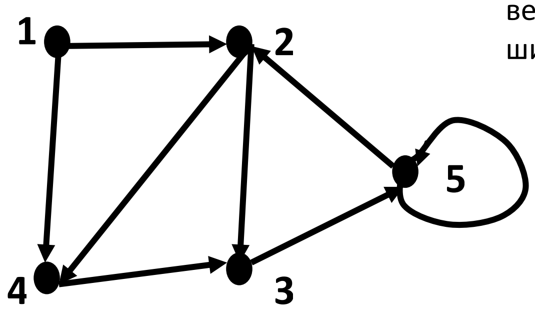
№ вер-шини	1	2	3	4	5
1	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**
2	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**
3	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**
4	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**
5	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**

Мал.10

Перший спосіб передбачає задання матриці суміжності, яка для графа з *n* вершинами представляється двовимірним масивом *n*n*.

Якщо матриця суміжності представляє неорієнтований незважений граф (мал. 9), то за наявності суміжності вершин *i* і *j* відповідні елементи матриці дорівнюють 1, тобто *a[i,j]*=*a[j,i]*=1, а у разі відсутності ребра між вершинами *i* та *j* – 0, тобто *a[i,j]*=*a[j,i]*=0 (мал. 10)

Особливістю незваженого орграфа, у якому присутні ребра-петлі, є те, що для відповідних вершин діагональні елементи матриці суміжності не дорівнюють 0 (мал. 11 та 12). Аналогічною буде ситуація і для неорієнтованих графів.

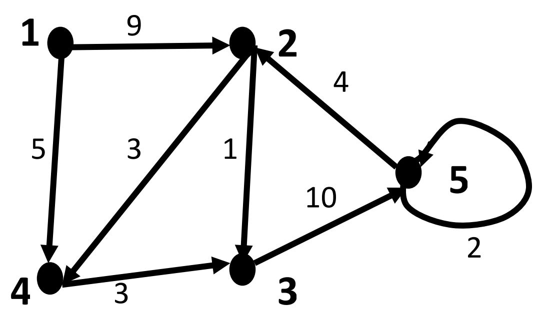


Мал.11

№ вер-шини	1	2	3	4	5
1	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**
2	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**
3	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**
4	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**
5	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**

Мал.12

Розглянемо тепер випадок зваженого графа. Елементи матриці суміжності a[i,j], що відповідає такому графу, збігатимуться зі значеннями «ваги» ребер між вершинами і та j (мал. 13 та 14).



Мал.13

№ вер-шини	1	2	3	4	5
1	**0**	**9**	**0**	**5**	**0**
2	**0**	**0**	**1**	**3**	**0**
3	**0**	**0**	**0**	**0**	**10**
4	**0**	**0**	**3**	**0**	**0**
5	**0**	**4**	**0**	**0**	**2**

Мал.14

Другим способом представлення графа є ***списки суміжних вершин***. У цьому разі для кожної вершини записується список суміжних вершин, який у довільному порядку містить усі суміжні з нею вершини.

Графу, зображеному на малюнку 9 відповідає список суміжних вершин:

1→2→4
2→1→5→3→4
3→2→4→5
4→1→3→2
5→3→2

Графу, зображеному на малюнку 11 відповідає список суміжних вершин:

1→2→4
2→3→4
3→5

4→3

5→2→5

Графу, зображеному на малюнку 13 відповідає список суміжних вершин:

1→2_9→4_5

2→3_1→4_3

3→5_{10}

4→3_3

5→2_4→5_2

Література:

Інформатика: методи побудови алгоритмів та їх аналіз: обчисл. алгоритми: навч. посіб. для 9-10 кл. з поглибл. вивч. інформатики / Т.П.Караванова. – К.: Генеза, 2009. – 336 с. : іл. – Бібліогр.: с.331.